

DEFINICIONES

Sea $z = (a, b)$ un n.º complejo
su forma binómica:

$$z = a + bi$$

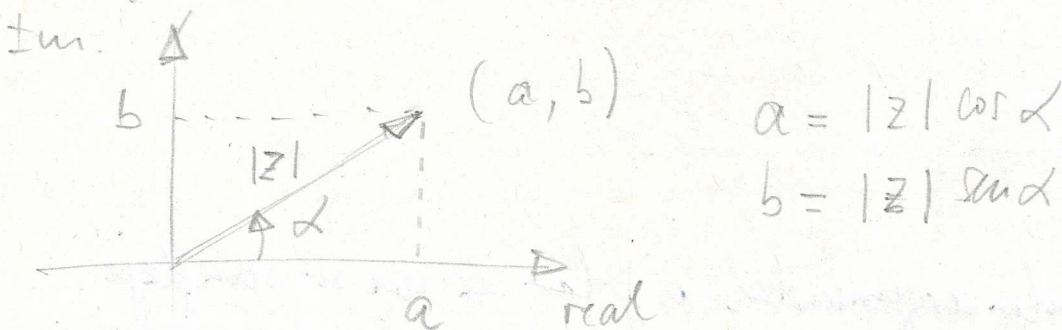
El complejo conjugado:

$$\bar{z} = a - bi$$

El módulo del complejo (a, b)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El argumento principal del complejo (a, b)



$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

OPERACIONES ELEMENTALES DE N.ºS COMPLEJOS

suma y resta:

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

producto:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Potencias de la unidad imaginaria:

$$\left. \begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ \vdots \end{array} \right\} \text{se repite}$$

i^u $u \in \mathbb{Z}$, basta elevar i al resto de la división de u entre 4.

Ejemplo:

$$i^{17} = i^1 = \boxed{i}$$

$$\begin{array}{r} 17 : 4 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

Forma módulo-argumental o polar de un n° complejo.

$$z = (\underbrace{\rho}_{\text{módulo}}, \underbrace{\alpha}_{\text{argumento}}) \quad \text{donde: } \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Se suele expresar:

$$z \rightarrow |z| \alpha$$

Ejemplo:

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$\rightarrow$

forma
POLAR

$$\boxed{2 \frac{3\pi}{4}}$$

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

Exponenciales complejas:

Dado un n° real a , se define la exponencial compleja e^{ia}

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a \quad \text{f. EXPONENCIAL}$$

Por lo que dado un n° complejo $z = x + yi$, se tiene

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

f. TRIGONOMÉTRICA

Como:

$$\underbrace{z = x + yi}_{\text{f. BINOMIAL}} = |z| \cos \alpha + i |z| \sin \alpha = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \underbrace{|z| e^{i\alpha}}_{\text{f. EXPONENCIAL}}$$

Multiplicación y división en f. trigonométrica:

$$\begin{aligned} \text{Si: } z_1 &= \rho_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \\ z_2 &= \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)] \end{aligned}$$

Aplicando las reglas de adición para seno y coseno:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

De igual manera se llega para la división:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Multiplicación y división en forma polar:

Es inmediato observar que la multíp. y la división en f. polar conduce a las siguientes expresiones:

Si:

$$z_1 = (\rho_1) \alpha_1$$

$$\rho_1 = |z_1|$$

$$z_2 = (\rho_2) \alpha_2$$

$$\rho_2 = |z_2|$$

Entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \alpha_1 - \alpha_2$$

Multiplicación y división en f. exponencial:

Si:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$$

$$\rho_1 = |z_1|$$

$$z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$$

$$\rho_2 = |z_2|$$

Entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

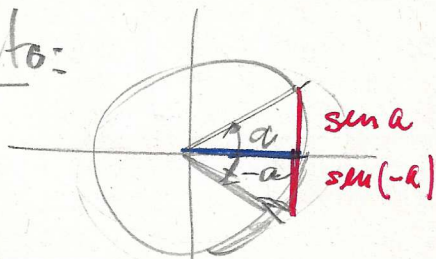
Fórmulas de Euler:

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$e^{-ia} = \cos(-a) + i \sin(-a) \equiv \cos a - i \sin a$$

RAZONAMIENTO

Razonamiento:



luego:

$$e^{ia} + e^{-ia} = (\cos a + i \sin a) + (\cos a - i \sin a) = 2 \cos a$$

$$\boxed{\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}}$$

Restando:

$$e^{ia} - e^{-ia} = (\cos a + i \sin a) - (\cos a - i \sin a) = 2i \sin a$$

$$\boxed{\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}}$$

Potencia de base compleja y exp. entero:

$$\underbrace{z \in \mathbb{C}}_{\text{BASE}}, \underbrace{w \in \mathbb{Z}}_{\text{EXP.}}$$

Expresando el complejo en forma exponencial:

$$z = |p| e^{i\alpha} \quad \text{donde } p = |z|$$

La potencia queda:

$$z^n = [p e^{i\alpha}]^n = |p|^n e^{in\alpha} = \underbrace{p^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)}_{\text{FORMULA DE MOIVRE}}^n$$

Raíces de índice natural de los n° complejos:

Sea:

$$z, w \in \mathbb{C} \quad y \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} \text{módulo: } |z| & \text{módulo: } |w| \\ \text{argumento: } \alpha & \text{argumento: } \beta \end{array}$$

Expresando los n° complejos en f. exponencial:

$$z = |z| e^{i\alpha}$$

$$w = |w| e^{i\beta}$$

Decimos que z es la raíz n -ésima del complejo w :

$$\sqrt[n]{w} = z \quad \xleftrightarrow{\text{Def. de raíz}} \quad z^n = w$$

$$\begin{aligned} [|z| e^{i\alpha}]^n &= w \\ [|z|^n e^{in\alpha}] &= w \\ |z|^n e^{in\alpha} &= |w| e^{i\beta} \end{aligned}$$

conclusión:

Módulo:

$$|z|^n = |w| \rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$$

Argumento:

$$e^{in\alpha} = e^{i\beta} \rightarrow n\alpha = \beta;$$

$$\alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$
VALOR PRINCIPAL

En forma trigonométrica:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|e^{i\beta}} = \sqrt[n]{|w|} \sqrt[n]{e^{i\beta}} = \sqrt[n]{|w|} \underbrace{e^{i\frac{\beta}{n}}}_{e^{i\alpha}} = \boxed{\sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\beta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\beta+2k\pi}{n} \right)}$$

Logaritmo de un n° complejo:

Sea:

$$z, w \in \mathbb{C}$$

En f. exponencial:

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

$$w = |w|e^{i\beta}$$

Definimos el logaritmo de w al n° complejo z tal que:

$$\ln w = z \quad \xleftrightarrow{\text{def. logaritmo}} \quad e^z = w$$

$$w = e^z = e^{\ln w} = e^{\ln(|w|e^{i\beta})}$$

Desarrollando el producto:

$$z = \ln |w| + i\beta = \ln |w| + i\beta$$

donde:

$$\boxed{z = \ln |w| + i\beta} \quad \text{Logaritmo principal (k=0)}$$

En realidad el logaritmo de un n° complejo no es único, sino que existen una infinidad de valores.

$$\boxed{z = \ln |w| + i(\beta + 2k\pi)} \quad , \quad k = \boxed{0}, 1, 2, 3, \dots$$

$$\boxed{\ln w = \ln |w| + i\beta}$$

↑
VALOR PRINCIPAL

Potencia de base y exponente complejo:

Podemos definir pot. complejas de a^w complejas:

$$z^w = e^{w \ln z}$$

$$z \neq 0$$

$w \rightarrow$ cualquier complejo